第４講　２次関数(3)

【基礎確認事項】

［１］　２次方程式の解の個数

□２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$b^2-4ac \geqq 0$ のとき　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である．

これは，$ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ より

$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=0$　すなわち　$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$　から導くことができる．

□$\boldsymbol{D=b^2-4ac}$ とおくと，次のことが成り立つ．

$D \geqq 0$　$\Longleftrightarrow$　実数解をもつ
　$D>0$　$\Longleftrightarrow$　異なる２つの実数解をもつ
　$D=0$　$\Longleftrightarrow$　１つの実数解（重解）をもつ
$D<0$　$\Longleftrightarrow$　実数解をもたない

$D=0$ のとき，その重解は $x=-\dfrac{b}{2a}$ である．

この b^2-4ac を２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式**という．断りのない限り，今後 D は判別式を表すものとする．

□また，２次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ であり，$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ とおくと，次のことが成り立つ．

$\dfrac{D}{4} \geqq 0$　$\Longleftrightarrow$　実数解をもつ
　$\dfrac{D}{4}>0$　$\Longleftrightarrow$　異なる２つの実数解をもつ
　$\dfrac{D}{4}=0$　$\Longleftrightarrow$　１つの実数解（重解）をもつ
$\dfrac{D}{4}<0$　$\Longleftrightarrow$　実数解をもたない

$\dfrac{D}{4}=0$ のとき，その重解は $x=-\dfrac{b'}{a}$ である．

⇒　C&U ①

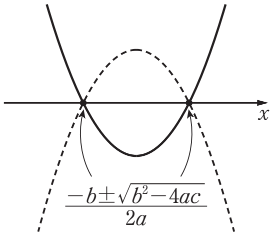
［２］　２次関数のグラフと x 軸の位置関係

□２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと直線 $y=0$，すなわち x 軸との共有点の x 座標に一致する．

□放物線の形状を考えるとき，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との位置関係は，x 軸との共有点の個数，すなわち２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数からわかる．

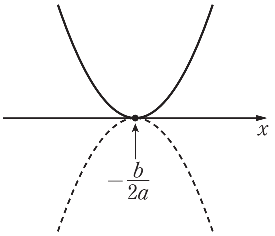
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□$D=b^2-4ac$ とすると，位置関係は以下のように分類される．



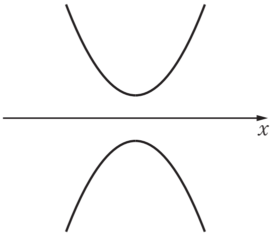
（i）$D>0$ のとき
異なる2点で交わる．
交点（共有点）は2個．
交点の x 座標は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



（ii）$D=0$ のとき
共有点は1個．
接するという．
接点の x 座標は

$$x=-\frac{b}{2a}$$



（iii）$D<0$ のとき
共有点をもたない．

⇒　C&U 2

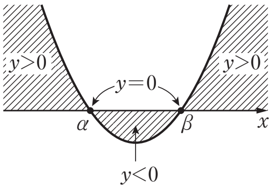
［3］　2次不等式のグラフによる解法

□前述のように，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと直線 $y=0$ すなわち x 軸との共有点の x 座標は，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解に一致する．このことを利用し，2次不等式を解くことを考える．

2次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は
　$y=ax^2+bx+c$ のグラフの y 座標が正となる x の範囲であり，
2次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は
　$y=ax^2+bx+c$ のグラフの y 座標が負となる x の範囲である．
これを，2次関数のグラフおよび x 軸との共有点の x 座標を用いて考える．

①　グラフが x 軸と異なる2つの交点をもつとき
交点の x 座標を α，β（$\alpha<\beta$）とする．

（i）$a>0$ のとき
　$x<\alpha$，$\beta<x$ においては　y 座標は正
　$x=\alpha$，β においては　y 座標は0
　$\alpha<x<\beta$ においては　y 座標は負
よって，以下のことがいえる．

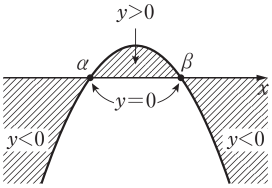


> $a>0$ のとき
> 　2次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$
> 　2次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$

（ii）$a<0$ のとき
$a>0$ のときと同様に考えると，以下のことがいえる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> $a<0$ のとき
> 　　2次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は　$\alpha<x<\beta$
> 　　2次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$



□$a<0$ のときの2次不等式は，両辺にマイナスを掛けることで，$a>0$ のときの2次不等式として考えることもできる．不等号の向きが逆転することに注意．

⇒　C&U 3

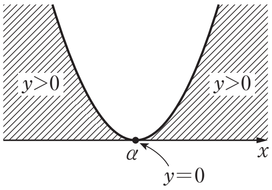
②　グラフが x 軸と接するとき

接点の x 座標を α とする．$a>0$ のときを考える．

$x<\alpha$，$\alpha<x$ においては　y 座標は正

$x=\alpha$ においては　y 座標は 0

y 座標が負となる x の値はない



よって，以下のことがいえる．

> $a>0$ のとき
> 　　2次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は　$x<\alpha$，$\alpha<x$（α 以外のすべての実数）
> 　　2次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は　ない
> 　　2次不等式 $ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　すべての実数
> 　　2次不等式 $ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　$x=\alpha$

□不等式に等号がついている場合は，$x=\alpha$ が解に含まれることに注意．

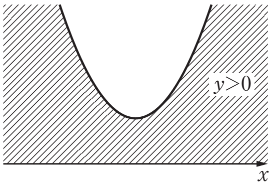
□また，$a<0$ の場合も同様にグラフで考えることができる．

⇒　C&U 4

③　グラフが x 軸と共有点をもたないとき

グラフより，以下のことがいえる．

> $a>0$ のとき
> 　　2次不等式 $ax^2+bx+c>0$ および $ax^2+bx+c\geqq 0$
> 　　　の解は　すべての実数
> 　　2次不等式 $ax^2+bx+c<0$ および $ax^2+bx+c\leqq 0$
> 　　の解は　ない



□グラフと x 軸との共有点がないため，等号の有無にかかわらず解は同じである．

□また，$a<0$ の場合も同様にグラフで考えるとよい．

⇒　C&U 5

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1　次の２次方程式の異なる実数解の個数を求めよ.

（1）$x^2-5x+5=0$　（2）$2x^2-3x+3=0$　（3）$x^2-2\sqrt{3}x+3=0$

2　次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係を調べよ.

（1）$y=-3x^2+2x-1$　（2）$y=2x^2+4x+2$　（3）$y=2x^2-8x+5$

3　次の２次不等式を解け.

（1）$2x^2-3x-2>0$　（2）$x^2-3x<0$

（3）$x^2\geqq 5$　（4）$x^2+2x-2\leqq 0$

4　次の２次不等式を解け.

（1）$x^2-6x+9>0$　（2）$x^2-6x+9\geqq 0$

（3）$4x^2+4x+1<0$　（4）$4x^2+4x+1\leqq 0$

5　次の２次不等式を解け.

（1）$x^2-x+3>0$　（2）$-2x^2+2x-3\geqq 0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　２次関数(3)

1　(1)　次の２次関数のグラフと x 軸との共有点の座標を求めよ．

(i)　$y=-x^2+2x+3$　(ii)　$y=2x^2-4x+2$　(iii)　$y=4(x-1)^2-5$

(2)　放物線 $y=3x^2-4x-1$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(3)　x 軸と２点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，点 $(3,\ -1)$ を通る放物線の方程式を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関数 $y=mx^2+2mx+1$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1)　①のグラフと x 軸との共有点の個数を調べよ．

(2)　①のグラフが x 軸と接するとき，その接点の座標を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　(1)　x についての2次不等式 $x^2-(1-a)x-a>0$ を解け．

(2)　2次不等式 $ax^2+bx+12>0$ の解が $-2<x<3$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　２次関数(3)

放物線 $y=ax^2+4x+5-a$ ……① のグラフと x 軸との共有点について調べる．
２次方程式 $ax^2+4x+5-a=0$ の判別式を D とすると，

$\frac{D}{4}=a^2-$ ア $a+$ イ である．よって，①のグラフが x 軸と２点で交わるのは，$a<0$，$0<a<$ ウ ，エ $<a$ のときである．また，①のグラフが x 軸と接するのは $a=$ ウ ，エ のときであり，このときの接点の座標は，$a=$ ウ のとき（$-$ オ ，0），$a=$ エ のとき $\left(-\frac{\text{カ}}{\text{キ}},\ 0\right)$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　２次関数(3)

【CHECK & UP】

1

(1)　$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot5=5>0$　　よって，実数解は **2 個**.

(2)　$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot3=-15<0$　　よって，実数解は **0 個**.

(3)　$\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot3=0$　　よって，実数解は **1 個**.

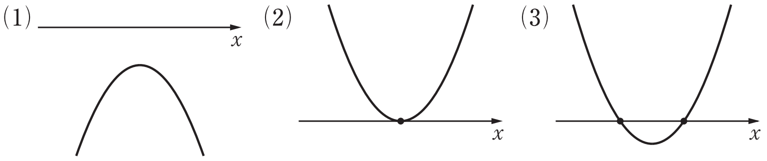
> ２次方程式の解そのものではなく解の個数が必要な場面がある．そのときにこの判別式 D が活躍する．

2

(1)　$\frac{D}{4}=1^2-(-3)\cdot(-1)=-2<0$　　よって，**共有点なし**.

(2)　$\frac{D}{4}=2^2-2\cdot2=0$　　よって，**接する**.

(3)　$\frac{D}{4}=(-4)^2-2\cdot5=6>0$　　よって，**異なる 2 点で交わる**.



> 1と同様に D の正負により位置関係を把握する．共有点の個数と同時に，凸方向も含めたグラフの状態を意識し，単なる計算で終わらせないようにすること．

3

(1)　$2x^2-3x-2>0$　より　$(2x+1)(x-2)>0$

よって解は　$\boldsymbol{x<-\frac{1}{2},\ 2<x}$

(2)　$x^2-3x<0$ より　$x(x-3)<0$

よって解は　$\boldsymbol{0<x<3}$

(3)　$x^2\geqq5$ より　$x^2-5\geqq0$

$x^2-5=0$ とすると　$x^2=5$

よって　$x=\pm\sqrt{5}$

したがって解は　$\boldsymbol{x\leqq-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\leqq x}$

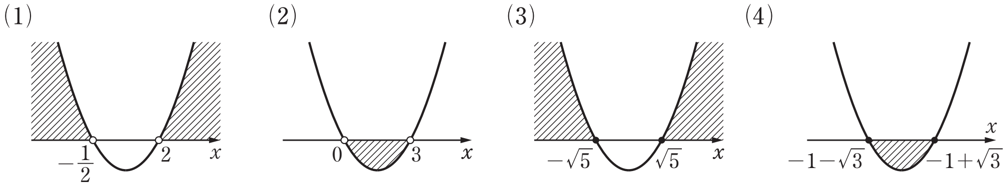
(4)　$x^2+2x-2=0$ を解いて　$x=-1\pm\sqrt{3}$

よって解は　$\boldsymbol{-1-\sqrt{3}\leqq x\leqq-1+\sqrt{3}}$

> (1)(2)　たすき掛けなどにより因数分解が思いつく場合は，因数分解することによりグラフと x 軸との交点の x 座標がわかる．その座標と放物線の形状により，２次不等式の解がわかる．無意味に (左辺)$=0$ とおくことのないように．

> (3)　まずは２次方程式の解法と同様に，項を左辺に集中させる．$x^2-5=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$ と思いつけば(1)(2)と同様に解くことができるが，思いつかない場合は (左辺)$=0$ として２次方程式を解けば，グラフと x 軸の交点の x 座標がわかる．

> (4)　x^2+2x-2 が因数分解「できない」のではない．因数分解を無理数の範囲に拡張すれば $x^2+2x-2=(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$ となる．これを思いつく人は多くはないと思われる．よって２次方程式にして解の公式を使い，x 軸との交点の x 座標を求めよう．



4

(1)　$x^2-6x+9>0$ より $(x-3)^2>0$

よって解は　**$x=3$ 以外のすべての実数**

(2)　$x^2-6x+9\geqq0$ より　$(x-3)^2\geqq0$

よって解は　**すべての実数**

> (1)(2)　3では２次不等式の等号の有無は解の等号の有無と一致していたが，「接する」場合はそう単純ではない．そもそも不等式に「等号が入る」ときは，該当箇所の点を「含む」ということであり，「等号がないときは，該当箇所の点を「含まない」ということである．(1)の解にグラフと x 軸との共有点の x 座標である $x=3$ を含めると(2)の解となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$4x^2+4x+1<0$ より　$(2x+1)^2<0$

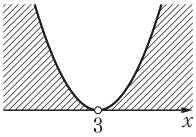
よって，解は　**ない**

(4)　$4x^2+4x+1\leqq 0$ より　$(2x+1)^2\leqq 0$

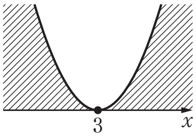
よって，解は　$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$

(3)(4)　グラフを見るとわかるように，x 軸より下の部分にグラフは存在しない．よって(3)(4)ともに <0 としての解はないが，(4)では等号があるため，グラフと x 軸との共有点（接点）の x 座標である $-\frac{1}{2}$ のみが解に入る．

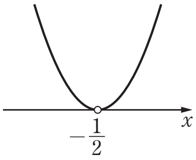
(1)



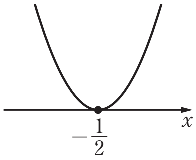
(2)



(3)



(4)



5　(1)　$D=1^2-4\cdot 1\cdot 3=-11<0$　であり，

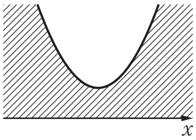
x^2 の係数が正より，解は　**すべての実数**

(2)　$-2x^2+2x-3\geqq 0$　より　$2x^2-2x+3\leqq 0$

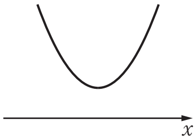
$\frac{D}{4}=1^2-2\cdot 3=-5<0$　であり，

x^2 の係数が正より，解は　**ない**

(1)



(2)



因数分解が思いつかず，かつ２次方程式の解の公式を使う際，D の値の符号がマイナスになったらそれはグラフと x 軸が共有点をもたないということである．おそらく多くの人が解の公式を使い，ルートの中がマイナスになって「あっ」と気づいたであろう．必ずしも D の計算から始める必要はないが，解の公式を使った「跡」が答案に残ることもなく，左の解答例のように，まるで「最初から思いついていたかのように」D から書き始めればよい．

あとはグラフの凸方向を確認した上で，x 軸より上や下にグラフが「すべて存在する」か「全く存在しない」を解として答えればよい．この凸方向の確認は必須であり，左では x^2 の符号についての記述とした．答案にグラフをかかないのであればその代わりにこの記述が有効である．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　２次関数(3)

1 (1) 次の２次関数のグラフと x 軸との共有点の座標を求めよ．

(i) $y=-x^2+2x+3$　(ii) $y=2x^2-4x+2$　(iii) $y=4(x-1)^2-5$

(2) 放物線 $y=3x^2-4x-1$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(3) x 軸と２点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，点 $(3,\ -1)$ を通る放物線の方程式を求めよ．

(1) (i) $y=-x^2+2x+3=-(x^2-2x-3)=-(x+1)(x-3)$ より　$\boldsymbol{(-1,\ 0),\ (3,\ 0)}$

(ii) $y=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2$ より　$\boldsymbol{(1,\ 0)}$

(iii) $y=4(x-1)^2-5$ に $y=0$ を代入して

$$4(x-1)^2-5=0 \qquad (x-1)^2=\frac{5}{4} \qquad x-1=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

よって　$x=+1\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

したがって　$\boldsymbol{\left(\dfrac{2-\sqrt{5}}{2},\ 0\right),\ \left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{2},\ 0\right)}$

(2) $y=3x^2-4x-1$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は

$3x^2-4x-1=0$ より　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

よって求める線分の長さは $\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}-\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{7}}{3}}$

(3) x 軸と２点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わることより，求める放物線は

$y=a(x+1)(x-2)$　とおける．これが点 $(3,\ -1)$ を通るので

$$-1=a\cdot4\cdot1 \qquad a=-\frac{1}{4}$$

よって求める放物線の式は　$y=-\dfrac{1}{4}(x+1)(x-2)$

したがって　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}}$

2 関数 $y=mx^2+2mx+1$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1) ①のグラフと x 軸との共有点の個数を調べよ．

(2) ①のグラフが x 軸と接するとき，その接点の座標を求めよ．

(1) $m=0$ のとき　①の式は $y=1$　　よって x 軸との共有点の個数は０個

$m\neq0$ のとき　判別式 D について　$\dfrac{D}{4}=m^2-m=m(m-1)$ より

$m<0,\ 1<m$ のとき　$D>0$ より　x 軸との共有点の個数は２個

$m=1$ のとき　$D=0$ より　x 軸との共有点の個数は１個

$0<m<1$ のとき　$D<0$ より　x 軸との共有点の個数は０個

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より　**$m<0$，$1<m$ のとき2個　　$m=1$ のとき1個　　$0\leqq m<1$ のとき0個**

(2)　①のグラフが x 軸と接するのは(1)より $m=1$ のとき．

このとき①は $y=x^2+2x+1=(x+1)^2$ より　求める接点の座標は　**$(-1,\ 0)$**

3　(1)　x についての2次不等式 $x^2-(1-a)x-a>0$ を解け．

(2)　2次不等式 $ax^2+bx+12>0$ の解が $-2<x<3$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

---

(1)　$x^2-(1-a)x-a>0$ より　$(x+a)(x-1)>0$

$-a<1$ つまり **$a>-1$ のとき　$x<-a$，$1<x$**

$a=-1$ のとき　$x=1$ 以外のすべての実数

$a<-1$ のとき　$x<1$，$-a<x$

(2)　条件より関数 $y=ax^2+bx+12$ のグラフは上に凸であり，

x 軸との交点の x 座標は $x=-2$，3である．

よって　$a<0$ かつ　$ax^2+bx+12=0$ の2解が $x=-2$，3である．

ゆえに　$4a-2b+12=0$ かつ $9a+3b+12=0$

したがって　**$a=-2$，$b=2$**　($a<0$ を満たす)

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　2次関数(3)

放物線 $y=ax^2+4x+5-a$ ……①　のグラフと x 軸との共有点について調べる．
2次方程式 $ax^2+4x+5-a=0$ の判別式を D とすると，
$\dfrac{D}{4}=a^2-$ [ア] $a+$ [イ] である．よって，①のグラフが x 軸と2点で交わるのは，
$a<0$，$0<a<$ [ウ]，[エ] $<a$ のときである．また，①のグラフが x 軸と接するのは $a=$ [ウ]，[エ] のときであり，このときの接点の座標は，$a=$ [ウ] のとき
$(-$ [オ]，$0)$，$a=$ [エ] のとき $\left(-\dfrac{[カ]}{[キ]},\ 0\right)$ である．

$ax^2+4x+5-a=0$ ……②　の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=a^2-\mathbf{5}a+\mathbf{4}=(a-1)(a-4)$　である．

よって，①のグラフが x 軸と2点で交わるのは　$D>0$　つまり

$(a-1)(a-4)>0$　より　$a<1,\ 4<a$　のとき．

①は放物線であるので $a\neq 0$

したがって　$a<0,\ 0<a<\mathbf{1},\ \mathbf{4}<a$　のときである．

また，①のグラフが x 軸と接するのは　$D=0$　つまり

$(a-1)(a-4)=0$　よって　$a=\mathbf{1},\ \mathbf{4}$　のときである．

①が x 軸と接するとき，その接点の x 座標は②がもつ重解である．

②が重解をもつとき，その解は $x=-\dfrac{2}{a}$ である．

よって　$a=\mathbf{1}$　のとき　接点の座標は　$(-\mathbf{2},\ \mathbf{0})$

$a=\mathbf{4}$　のとき　接点の座標は　$\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ 0\right)$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。